Τοπολογικές ιδιότητες του $\mathbb{R}^n$ (Επανάληψη).

$\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r>0$. Τότε: $B(\bar{x}_0,r) := \{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{x}_0\| < r\}$ ανοικτή μπάλα

$\bar{B}(\bar{x}_0,r) := \{$ —//— $\le r\}$ κλειστή μπάλα

$S(\bar{x}_0,r) := \partial B(\bar{x}_0,r) := \{$ —//— $= r\}$ σφαίρα

Ορισμός: $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό $:\Leftrightarrow \forall \bar{x}\in U\ \exists \varepsilon>0,\ B(\bar{x},\varepsilon)\subset U$
κλειστό $:\Leftrightarrow \mathbb{R}^n\setminus U$ ανοικτό

Πρόταση: (α) Η ένωση μιας οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων (του $\mathbb{R}^n$) είναι ανοικτή.
(β) Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών υποσυνόλων (του $\mathbb{R}^n$) είναι ανοιχτή

Παρατήρηση: Τα $\emptyset, \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ είναι και ανοιχτά και κλειστά

Απόδειξη πρότασης: (α) Έστω U_i, $i\in I$, μια οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και $\bar{x}\in\bigcup_{i\in I}U_i \Rightarrow \bar{x}\in U_{i_0} \Rightarrow$ (U_{i_0} ανοιχ.)
$\Rightarrow \exists\varepsilon>0\ B_n(\bar{x},\varepsilon)\subset U_{i_0}\subset\bigcup_{i\in I}U_i$

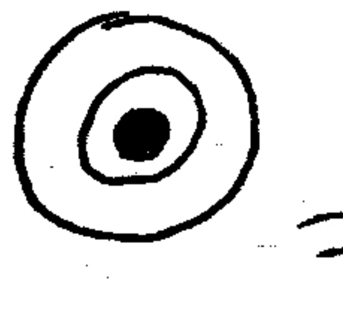
(β) U_i, $i=1,\dots,k$ ανοιχτά και $\bar{x}\in\bigcap_{i=1}^{k} U_i \Rightarrow \bar{x}\in U_i,\ \forall i=1,\dots,k$
$\Rightarrow \forall i=1,\dots,k\ \exists\varepsilon_i>0 : B(\bar{x},\varepsilon_i)\subset U_i \Rightarrow$ θέτω $\varepsilon=\min\{\varepsilon_i, i=1,\dots,k\}$
(U_i ανοιχτά)
και έχουμε $B(\bar{x},\varepsilon)= B(\bar{x},\varepsilon_i)\subset U_i \Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon)\subset\bigcap_{i=1}^{k} U_i$

Προσοχή: Η τομή απείρων αριθμήσιμων ανοικτών υποσυνόλων δεν είναι ανοικτό υποσύνολο.

π.χ.

$B_n(\bar{x}_0, \frac{1}{k})$

$k\in\mathbb{N}$



$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} B_n(\bar{x}_0,\frac{1}{k}) = \{\bar{x}_0\}$.

Το $\{\bar{x}_0\}\subset\mathbb{R}^n$ δεν είναι ανοικτό. (*) Τελευταία σελίδα.

Πρόταση (Άσκηση με χρήση της προηγούμενης) → Τελευταία σελίδα.
(α) Η τομή μιας οικογένειας κλειστών είναι κλειστό.
(β) Η ένωση πεπερασμένου αριθμού κλειστών είναι κλειστό.
(Απόδειξη: Εξετάστε τα $\mathbb{R}^n \setminus (\bigcap_{i\in I} K_i)$ και $\mathbb{R}^n \setminus (\bigcap_{i=1}^{n} K_i)$, όπου K_i κλειστά

Προσοχή: Μια αριθμήσιμη ένωση κλειστών δεν είναι (πάντα) κλειστό.

$\overline{B_n}(\bar{0}, 1-\frac{1}{k})$, $k=2,3,\ldots$

$\bigcup_{k=2}^{\infty} \overline{B_n}(0, 1-\frac{1}{k}) = B_n(\bar{0},1) \longrightarrow$ Α συνεχή ∦

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, λέγεται:
(α) Εσωτερικό σημείο του $U \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$
(β) Εξωτερικό σημείο του $U \Leftrightarrow$ το $\bar{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}^n \setminus U$.
(γ) Συνοριακό σημείο του $U \Leftrightarrow$ το $\bar{x}$ δεν είναι ούτε εσωτερικό, ούτε εξωτερικό.

- Επίσης το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του U, λέγεται εσωτερικό του U, και συμβολίζεται με $\operatorname{int} U$ ή $\mathring{U}$ (εσωτερικό = interior).
- Το σύνολο όλων των εξωτερικών σημείων με $\operatorname{ext} U$ (εξωτερικό = exterior)
- Τέλος, το σύνολο των συνοριακών σημείων, λέγεται σύνορο του U, και συμβολίζεται με $\operatorname{bdr} U$ ή ∂U (σύνορο = boundarb).

$\mathbb{R}^n = \operatorname{int} U \cup \operatorname{ext} U \cup \partial U$
και αυτά τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους.

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Το $\bar{x}$ λέγεται
(1) σημείο συσσώρευσης (ή οριακό σημείο) = limit point του $U \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$.
(2) μεμονωμένο σημείο του $U \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \{\bar{x}\}$

3) σημείο επαφής του U :(=) το $\bar{x}$ είναι σημείο του U ή σημείο συσσώρευσης.

// Άσκηση (Λύση)

i) Αν $K_i, i\in I$ κλειστά τότε $\bigcap_{i\in I} K_i$ κλειστό.

ii) Αν $K_1,\dots,K_n$ κλειστά τότε $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ κλειστό.

Για το i) $K_i, i\in I$ κλειστά $\Rightarrow \mathbb{R}^n\setminus K_i, i\in I$ ανοιχτά

$$\Rightarrow \bigcup_{i\in I}(\mathbb{R}^n\setminus K_i) = \mathbb{R}^n\setminus \bigcap_{i\in I} K_i \text{ ανοιχτό} \Rightarrow \bigcap_{i\in I} K_i \text{ κλειστό.}$$

ii) Παρόμοια διαδικασία.

✪ Κάθε μονοσύνολο $\{\bar{x}\}\subset\mathbb{R}^n$, είναι κλειστό. (Ισχυρισμός)

Απόδειξη | Έστω $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ και $\bar{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}$. Τότε $\bar{x}\neq\bar{y}$.

Θέτω $r=d(\bar{x},\bar{y})=\|\bar{x}-\bar{y}\|>0$ και έχω ότι $\bar{x}\notin B(\bar{y},r)$,

άρα $\{\bar{x}\}\cap B(\bar{y},r)=\emptyset$. Επομένως $B(\bar{y},r)\subset(\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\})$

Δηλαδή το $\underbrace{\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{x}\}}_{\{\bar{x}\}^c}$ είναι ανοιχτό, επομένως το $\{\bar{x}\}$ είναι κλειστό